

ZASADA AKCJI I REAKCJI A ZASADA ZACHOWANIA PĘDU

**UWAGA:
BĘDA
RÓŻNICZKI!**



Korzystając z rachunku różniczkowego i całkowego, możemy z łatwością wyprowadzić zasadę zachowania pędu. Niech v i m będą prędkością i masą obiektu 1, V i M – obiektu 2. Załóżmy, że na te obiekty nie działa żadna siła zewnętrzna. Przyjmując, że $\vec{F}_{m \rightarrow M}$ to siła, jaką obiekt 1 działa na obiekt 2, $\vec{F}_{M \rightarrow m}$ to siła, jaką obiekt 2 działa na obiekt 1, możemy zastosować drugą zasadę Newtona jak poniżej:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{M \rightarrow m} \quad \text{oraz} \quad M \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}_{m \rightarrow M}$$

Zastąpmy te dwa równania następującym równaniem zasady akcji i reakcji:

$$\vec{F}_{M \rightarrow m} = -\vec{F}_{m \rightarrow M}$$

Otrzymamy taki wynik:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -M \frac{d\vec{V}}{dt}$$

Ponieważ masa jest stała, powyższe wyrażenie można przekształcić następująco:

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = - \frac{d(M\vec{V})}{dt}$$

Po przekształceniu otrzymamy:

$$\frac{d}{dt} (m\vec{v} + M\vec{V}) = 0$$

To równanie wskazuje, iż suma pędu obiektów 1 i 2 ($m\vec{v} + M\vec{V}$) nie zmienia się w czasie. Z tego równania można wyprowadzić zasadę zachowania pędu:

$$m\vec{v} + M\vec{V} = \text{constant}$$

Pochodna równa zero oznacza, że pęd się nie zmienia! Zasada zachowania pędu została wyprowadzona z zasady akcji i reakcji oraz z drugiej zasady Newtona. Można więc powiedzieć, że zasada zachowania pędu wynika z zasady akcji i reakcji.

Tej samej metody można użyć do wyprowadzenia zasady zachowania pędu dla trzech lub większej liczby obiektów.

NAPĘD RAKIETY

W laboratorium na stronie 126 dowiedzieliśmy się, że astronauta w przestrzeni kosmicznej będzie się poruszać w kierunku przeciwnym niż przedmiot przez niego rzucony. To zjawisko rządzi się takimi samymi prawami jak napęd rakiety. Rakieta zwiększa swoją prędkość, wyrzucając spaliny z silnika z dużą szybkością, i porusza się w kierunku przeciwnym do tego wyrzutu. Przyjrzyjmy się dokładnie temu zjawisku.



Założmy po pierwsze, że nieruchoma rakieta w kosmosie odrzuca mały obiekt o masie m i prędkości v . Przyjmijmy dalej, że M to suma mas małego obiektu i rakiety, a V_1 to prędkość rakiety po wyrzuceniu spalin. Biorąc po uwagę zasadę zachowania pędu (i wiedząc, że te prędkości mają przeciwne zwroty), otrzymujemy następujące równanie:

$$0 = (M - m)V_1 - mv$$

$$\textcircled{1} \quad V_1 = \frac{mv}{M - m}$$

Wyznaczyliśmy prędkość V_1 ruchu rakiety. Przypuśćmy teraz, że rakieta wyrzuca kolejny obiekt o masie m ze *względną prędkością* (prędkością względem rakiety) $-v$ w tym samym kierunku co poprzedni. Wtedy, przyjmując, że V_2 to prędkość rakiety, i zauważając, że całkowita masa rakiety przed i po wyrzuceniu drugiego obiektu to odpowiednio $M - m$ oraz $M - 2m$, otrzymujemy następujące równanie:

$$(M - m)V_1 = (M - 2m)V_2 + m(V_1 - v)$$

Zwróćmy uwagę, że mały obiekt porusza się z prędkością $V_1 - v$, gdy rakieta przyspiesza z prędkością V_1 . Z powyższego wyrażenia można znaleźć wartość V_2 jak poniżej:

$$\textcircled{2} \quad V_2 = V_1 + \frac{mv}{M - 2m}$$

Wstawiając wartość V_1 z równania $\textcircled{1}$ do równania $\textcircled{2}$, otrzymujemy:

$$V_2 = \frac{mv}{M - m} + \frac{mv}{M - 2m}$$

$$\textcircled{3} \quad V_2 = mv \left(\frac{1}{M - m} + \frac{1}{M - 2m} \right)$$

Znaleźliśmy prędkość rakiety po wyrzuceniu dwóch małych obiektów.